M14/5/MATHL/HP3/FRE/TZ0/SG

22147223

International Baccalaureate® Baccalauréat International Bachillerato Internacional

MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 3 – ENSEMBLES, RELATIONS ET GROUPES

Jeudi 15 mai 2014 (après-midi)

1 heure

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du *livret de formules pour le cours* ***de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS*** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est *[60 points]*.

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. *[Note maximale : 12]*

L'opération binaire Δ est définie sur l'ensemble $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ par la table de Cayley suivante.

Δ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	1	1	2	3	4
2	1	2	1	2	3
3	2	1	3	1	2
4	3	2	1	4	1
5	4	3	2	1	5

(a) Indiquez si S est fermé sous l'opération Δ et justifiez votre réponse. *[2]*

(b) Indiquez si Δ est commutative et justifiez votre réponse. *[2]*

(c) Indiquez s'il y a un élément neutre et justifiez votre réponse. *[2]*

(d) Déterminez si Δ est associative et justifiez votre réponse. *[3]*

(e) Trouvez les solutions de l'équation $a\Delta b = 4\Delta b$, pour $a \neq 4$. *[3]*

2. *[Note maximale : 19]*

Considérez l'ensemble S défini par $S = \{s \in \mathbb{Q} : 2s \in \mathbb{Z}\}$.

Vous pouvez supposer que $+$ (l'addition) et $\times$ (la multiplication) sont des opérations binaires associatives sur $\mathbb{Q}$.

(a) (i) Écrivez les six plus petits éléments non négatifs de S.

(ii) Montrez que $\{S, +\}$ est un groupe.

(iii) Donnez une raison pour laquelle $\{S, \times\}$ n'est pas un groupe. Justifiez votre réponse. *[9]*

(b) La relation R est définie sur S par $s_1 R s_2$ si $3s_1 + 5s_2 \in \mathbb{Z}$.

(i) Montrez que R est une relation d'équivalence.

(ii) Déterminez les classes d'équivalence. *[10]*

3. *[Note maximale : 15]*

Les ensembles X et Y sont définis par $X = \left]0, 1\right[$ et $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

(a) (i) Esquissez l'ensemble $X \times Y$ dans le plan cartésien.

(ii) Esquissez l'ensemble $Y \times X$ dans le plan cartésien.

(iii) Indiquez $(X \times Y) \cap (Y \times X)$. *[5]*

Considérez la fonction $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y$
et la fonction $g : X \times Y \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = xy$.

(b) (i) Trouvez l'image de la fonction f.

(ii) Trouvez l'image de la fonction g.

(iii) Montrez que f est une injection.

(iv) Trouvez $f^{-1}(\pi)$, en exprimant votre réponse sous forme exacte.

(v) Trouvez toutes les solutions de $g(x, y) = \frac{1}{2}$. *[10]*

4. *[Note maximale : 14]*

Soit $f : G \to H$ un homomorphisme de groupes finis.

(a) Prouvez que $f(e_G) = e_H$, où e_G est l'élément neutre dans G et e_H est l'élément neutre dans H. *[2]*

(b) (i) Prouvez que le noyau de f, $K = \text{Ker}(f)$, est fermé sous l'opération du groupe.

(ii) Déduisez que K est un sous-groupe de G. *[6]*

(c) (i) Prouvez que $gkg^{-1} \in K$ pour tout $g \in G$, $k \in K$.

(ii) Déduisez que chaque classe à gauche de K dans G est aussi une classe à droite. *[6]*